GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ

ANALIZĂ MATEMATICĂ

PENTRU LICEU

EDITURA HYPERION

CUPRINS

1. Limite de funcții

1.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală

1.1.1 Operații algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)\ (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x + y = y + x\ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x\ (\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x + (-x) = (-x) + x\ (\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)\ (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy = yx\ (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\ (\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1\ (\forall)\, x \in \mathbf{R},\ \ x \neq 0$;

numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y + z) = xy + xz\ (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

a) $x - y = x + (-y), (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
b) $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

1.1.2 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe **R** relațiile $<$ respectiv $\leq$ astfel:
a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

a) Proprietatea de trihotomie. Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ este adevărată una și numai una din relațiile $x < y, x = y, x > y$.

b) Proprietățile relației $\leq$:
1) $x \leq x, (\forall)x \in \mathbf{R}$ (reflexivitate);
2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația $\leq$, este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea **R**.

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea **R**.

c) Relația $\leq$ este o **relație de ordine totală** pe **R**, deoarece $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

d) Proprietăți de legătură are relației $\leq$ cu operațiile de adunare și înmulțire:
1) $x \leq y, z \in \mathbf{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$;
2) $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$;
3) $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$;
4) $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;
5) $x \leq y, z \leq t,\ x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$, implică $\Rightarrow xz \leq yt$.

1.1.3 Modulul unui număr real

Definiție. Valoarea absolută sau modulul unui număr real x se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți:
1) $|x| \geq 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$;
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) $|-x| = |x|, (\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) $|xy| = |x| \cdot |y|, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (\forall)x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$;
6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
7) $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a = 0 \\ \pm a, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$;
8) $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$;
9) $|x| > a, a > 0 \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$.

1.1.4 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui **R** pe care le numim intervale:

1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în a și b
2) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în a și b
3) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în a, deschis în b
4) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în a, închis în b
5) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în a și nemărginit la dreapta
6) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în a și nemărginit la dreapta
8) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în b
9) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în b.

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

Distanța euclidiană dintre numerele reale a și b se definește ca fiind numărul $d(a, b) = |a - b|$.

Axioma lui Arhimede. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există un număr întreg unic n, astfel încât $n \leq x < n + 1$. Numărul n se numește partea întreagă a lui x și se notează $[x]$

1.1.5 Mulțimi mărginite

Definiție. Fiind dată mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$, numim **minorant** al mulțimii A numărul $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $m \leq x, (\forall) x \in A$.

Exemplu. Numărul 1 este minorant al mulțimii $\{3, 4, 5\}$, deoarece $1 \leq 3, 1 \leq 4, 1 \leq 5$.

Definiție. Fiind dată mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$, numim **majorant** al mulțimii A numărul $M \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \leq M, (\forall) x \in A$.

Exemplu. Numărul 8 este majorant al mulțimii $(1, 2)$ deoarece $x \leq 8, (\forall) x \in (1, 2)$.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ se numește **mărginită inferior** dacă are cel puțin un minorant.

Exemplu. Mulțimea $(2, 7)$ este mărginită inferior deoarece 0 este un minorant al ei.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ se numește **mărginită superior** dacă are cel puțin un majorant.

Exemplu. Mulțimea $(1, 9)$ este mărginită superior deoarece 10 este un majorant al ei.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ se numește **mărginită** dacă este mărginită superior și inferior.

Exemplu. Mulțimea $(2, 7)$ este mărginită superior de 15 și inferior de 0, deci este mărginită.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ se numește **nemărginită** dacă nu este mărginită, .

Exemplu. Mulțimea $(0, \infty)$ este mărginită inferior și nu este mărginită superior deci nu este mărginită.

Teoremă. O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ este mărginită dacă și numai dacă există $M > 0$, astfel încât $|x| \leq M, (\forall) x \in A$.

Consecință. O mulțime nevidă $A \subset \mathbf{R}$ este nemărginită dacă și numai dacă $(\forall) M > 0$, există $x_M \in A$ astfel încât $|x_M| > M$.

1.1.6 Marginile unei mulțimi

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$. Numărul $m \in \mathbf{R}$ se numește **minimul** mulțimii A și se notează cu **min** A dacă:
a) m este minorant pentru mulțimea A;
b) $m \in A$.

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$. Numărul $M \in \mathbf{R}$ se numește **maximul** mulțimii A și se notează cu **max** A dacă:
a) M este majorant pentru mulțimea A;
b) $M \in A$.

Exemplu. Mulțimea $A = [1, 5]$ are $\min A = 1$ și $\max A = 5$.

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$.
a) Cel mai mare minorant al mulțimii A (dacă există) se numește **infimum** sau **margine inferioară** pentru mulțimea A și se notează $\inf A$.
b) Cel mai mic majorant al mulțimii A (dacă există) se numește **supremum** sau **margine superioară** pentru mulțimea A și se notează $\sup A$.

Observație.
a) Dacă $(\exists)\inf A \in A$, atunci $\inf A = \min A$;
b) Dacă $(\exists)\sup A \in A$, atunci $\sup A = \max A$.

Exemplu. Pentru mulțimea $A = (0, 4]$, avem $\inf A = 0$ și $\sup A = \max A = 4$.

Axioma lui Cantor. Orice mulțime nevidă de numere reale, mărginită inferior admite o margine inferioară.

Consecință. Orice mulțime nevidă de numere reale, mărginită superior admite o margine superioară.

Observație.
a) Dacă $A \subset \mathbf{R}$ este o mulțime nemărginită inferior, atunci ea nu are minorant număr real, și în acest caz vom lua $\inf A = -\infty$.

b) Dacă $A \subset \mathbf{R}$ este o mulțime nemărginită superior, atunci ea nu are majorant număr real, și în acest caz vom lua $\sup A = +\infty$.

Notație. Notăm $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1.7 Vecinătăți, puncte de acumulare

Definiția. Mulțimea $V \subset \mathbf{R}$ se numește **vecinătate** a punctului $a \in \mathbf{R}$ dacă există interval deschis (b, c) astfel încât $a \in (b, c) \subset V$.

Exemplu. Intervalul $(1, 5)$ este vecinătate pentru punctul 3, deoarece $3 \in (2, 4) \subset (1, 5)$.

Definiția. Mulțimea $V \subset \mathbf{R}$ se numește **vecinătate** a lui $+\infty$ dacă există interval deschis $(a, +\infty)$ astfel încât $(a, +\infty) \subset V$.

Definiția. Mulțimea $V \subset \mathbf{R}$ se numește **vecinătate** a lui $-\infty$ dacă există interval deschis $(-\infty, a)$ astfel încât $(-\infty, a) \subset V$.

Notație. Pentru $a \in \overline{\mathbf{R}}$ notăm $\mathcal{V}(a)$ mulțimea vecinătăților punctului a.

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$. Numărul $a \in \overline{\mathbf{R}}$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A, dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$, $A \cap (V - \{a\}) \neq \emptyset$.

Observație. Orice punct $a \in \mathbf{R}$ care nu este punct de acumulare al lui A se numește **punct izolat** al mulțimii A.

Exemple. Pentru mulțimea $A = (1, 3)$ mulțimea punctelor de acumulare este $[1, 3]$, iar pentru mulțimea $\{1, 2, 3\}$ nu există puncte de acumulare, iar punctele $1, 2, 3$ sunt puncte izolate.

1.2 Funcții reale de variabilă reală

Definiție. Fiind date mulțimile $A, B \subset \mathbf{R}$, funcția $f: A \to B$ se numește **funcție reală de variabilă reală**.

Definiție. Funcția $f: A \to \mathbf{R}$ se numește funcție **mărginită**

inferior dacă există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) \geq a, (\forall)x \in A$.

Definiție. Funcția $f: A \to \mathbf{R}$ se numește funcție **mărginită superior** dacă există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) \leq a, (\forall)x \in A$.

Definiție. Funcția $f: A \to \mathbf{R}$ se numește funcție **mărginită** dacă este mărginită inferior și superior.

Exemplu. Funcția $f: [1,2] \to \mathbf{R}, f(x) = x^3$ este mărginită, deoarece $1 \leq f(x) \leq 8\ (\forall)x \in [1,2]$.

1.3 Șiruri de numere reale

1.3.1 Noțiunea de șir

Definiție. Fiind dată o mulțime oarecare A, numim **șir** de elemente din mulțimea A o funcție $f: \mathbf{N}^* \to A$.

Dacă $A \subset \mathbf{R}$, atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm $f(n) = a_n$, iar șirul de numere reale cu $(a_n)_{n\geq 1}$.

Exemple. a) $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 2n + 3$.

b) $(a_n)_{n\geq 1}, a_1 = a, a_{n+1} = a_n + r, r \in \mathbf{R}$ – progresie aritmetică.

Definiție. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale și $\varphi: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Șirul $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 1}$ se numește **subșir** al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

Exemplu. Fiind dat șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 2n + 5$ și $\varphi: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ $\varphi(n) = 2n$, atunci $a_{\varphi(n)} = a_{2n} = 4n + 5$.

1.3.2 Limite de șiruri

Definiție. Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are limita a dacă în afara oricărei vecinătăți a lui a se află un număr finit de termeni ai șirului. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Exemplu. Să arătăm că: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$.

Vom arăta că în afara oricărei vecinătăți $V = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ există un număr finit de termeni ai șirului. Din condiția $\frac{n+1}{n+2} \in V$ obținem: $1-\varepsilon < \frac{n+1}{n+2} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$ (1).

Dacă $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, atunci (1)este adevărată pentru orice $n \geq 1$ și atunci în afara vecinătății V nu se află nici un termen al șirului.

Dacă $\varepsilon < \frac{1}{2}$, atunci luăm $n(\varepsilon) = \left[\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$ și atunci în afara vecinătății V se află termenii $a_1, a_2, \cdots, a_{n(\varepsilon)}$.

Definiție. Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$ dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai șirului. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Definiție. Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are limita $-\infty$ dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $-\infty$ se află un număr finit de termeni ai șirului. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

1.3.3 Proprietăți ale șirurilor care au limită

Teoremă. Limita unui șir de numere reale dacă există este unică.

Definiție. Un șir de numere reale care are limita finită se numește **șir convergent**.

Exemplu. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = \frac{n}{n+5}$ are limita 1 și este deci șir convergent.

Definiție. Un șir de numere reale care are limita $+\infty$ sau $-\infty$ se numește **șir divergent**.

Exemplu. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = 1 + (-1)^n$ este de fapt șirul