

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

Respect pentru oameni și cărți

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR
DE MATEMATICĂ
ANALIZĂ MATEMATICĂ
PENTRU LICEU**

EDITURA HYPERION

1	Limite de funcții	3
1.1	Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală	3
1.1.1	Operații algebrice cu numere reale	3
1.1.2	Ordonarea numerelor reale	4
1.1.3	Modulul unui număr real	4
1.1.4	Operații cu intervale de numere reale	5
1.1.5	Mulțimi mărginite	6
1.1.6	Marginile unei mulțimi	7
1.1.7	Vecinătăți, puncte de acumulare	8
1.2	Functii reale de variabilă reală	8
1.3	Șiruri de numere reale	9
1.3.1	Noțiunea de șir	9
1.3.2	Limite de șiruri	9
1.3.3	Proprietăți ale șirurilor care au limită	10
1.3.4	Șiruri monotone și mărginite	11
1.3.5	Proprietăți ale șirurilor convergente	12
1.3.6	Calculul limitelor unor șiruri	12
1.3.7	Trecerea la limită în inegalități	13
1.3.8	Criterii de convergență	14
1.3.9	Alte criterii de convergență	18
1.3.10	Lema lui Stolz-Cesaro	19
1.3.11	Numărul e	20
1.3.12	Constanta lui Euler	21
1.3.13	Operații cu șiruri convergente	21
1.3.14	Șiruri definite prin relații de recurență	24
1.4	Limite de funcții	28

1.4.1	Limita unei funcții într-un punct, limite laterale	28
1.4.2	Criterii de limită	30
1.4.3	Operații cu limite de funcții	31
1.4.4	Limite de funcții compuse	33
1.4.5	Limitele funcțiilor elementare	33
1.4.6	Limite remarcabile	40
2	Funcții continue	44
2.1	Studiul continuității în puncte de pe dreapta reală	44
2.2	Operații cu funcții continue	47
2.3	Proprietăți ale funcțiilor continue	51
3	Funcții derivabile	54
3.1	Derivata unei funcții într-un punct	54
3.2	Derivate laterale	56
3.3	Derivatele unor funcții uzuale	59
3.4	Operații cu funcții derivabile	61
3.4.1	Operații algebrice cu funcții derivabile ..	61
3.4.2	Derivarea funcțiilor compuse	63
3.4.3	Derivarea funcțiilor inverse	63
3.4.4	Formule de derivare a funcțiilor compuse	63
3.4.5	Funcții de n ori derivabile	65
3.5	Funcții derivabile pe un interval	66
3.5.1	Puncte de extrem	66
3.5.2	Teorema lui Fermat	66
3.5.3	Teorema lui Rolle	67
3.5.4	Teorema lui Lagrange	68
3.6	Regulile lui l'Hospital	69
4	Reprezentarea grafică a funcțiilor	73
4.1	Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	73
4.2	Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	74
4.3	Asimptotele funcțiilor	75
4.4	Demonstrarea unor inegalități	78

	4.5 Etapele reprezentării grafice a funcțiilor	81
5	Primitive	85
	5.1 Primitivile unei funcții	85
	5.1.1 Noțiunea de primitivă	85
	5.1.2 Integrala nedefinită	85
	5.1.3 Formule ale integralelor nedefinite	86
	5.2 Metode de integrare	88
	5.2.1 Metoda integrării prin părți	88
	5.2.2 Metoda integrării prin schimbarea de variabilă	90
	5.3 Integrarea funcțiilor raționale	92
	5.3.1 Definirea funcțiilor raționale	92
	5.3.2 Integrarea funcțiilor raționale simple	93
	5.3.3 Integrarea funcțiilor raționale oarecare	96
	5.4 Integrarea funcțiilor trigonometrice	98
6	Integrala definită	100
	6.1 Funcții integrabile	100
	6.1.1 Diviziuni	100
	6.1.2 Sume Riemann, sume Darboux	101
	6.1.3 Noțiunea de integrală definită	101
	6.1.4 Formula lui Leibniz-Newton	103
	6.1.5 Clase de funcții integrabile	104
	6.1.6 Proprietăți ale funcțiilor integrabile	105
7	Metode de calcul pentru integrale definite	107
	7.1 Metoda de integrare prin părți	107
	7.2 Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă	108
8	Aplicații ale integralei definite	109
	8.1 Aria unei suprafețe plane	109
	8.2 Volumul corpurilor de rotație	110

1. Limite de funcții

1.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală

Respect 1.1.1.1 Operării algebrice cu numere reale

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

- 1) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z)$ ($\forall x, y, z \in \mathbf{R}$);
- 2) Comutativitatea: $x + y = y + x$ ($\forall x, y \in \mathbf{R}$);
- 3) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x$ ($\forall x \in \mathbf{R}$);
- 4) Element opus: $x + (-x) = (-x) + x$ ($\forall x \in \mathbf{R}$); numărul $-x$ se numește opusul lui x .

b) Proprietățile înmulțirii

- 1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz)$ ($\forall x, y, z \in \mathbf{R}$);
- 2) Comutativitatea: $xy = yx$ ($\forall x, y \in \mathbf{R}$);
- 3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ($\forall x \in \mathbf{R}$);
- 4) Element inversabil: $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$ ($\forall x \in \mathbf{R}, x \neq 0$); numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x .

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

- 1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y + z) = xy + xz \quad (\forall x, y, z \in \mathbf{R}).$$

Observație. Ca operații derive ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

a) $x - y = x + (-y)$, ($\forall x, y \in \mathbf{R}$);

b) $x:y = x \cdot \frac{1}{y}$, $y \neq 0$.

1.1.2 Ordonarea numerelor reale

Introducem pe \mathbf{R} relațiile $<$ respectiv \leq astfel:

- a) $x < y$ dacă $y - x > 0$;
b) $x \leq y$ dacă $y - x \geq 0$.

a) **Proprietatea de trihotomie.** Oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ este adevărată una și numai una din relațiile $x < y$, $x = y$, $x > y$.

b) **Proprietățile relației \leq :**

- 1) $x \leq x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ (reflexivitate);
- 2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie);
- 3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Relația \leq este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă și deci este o **relație de ordine** pe mulțimea \mathbf{R} .

Relația $<$ este tranzitivă, dar nu este reflexivă și antisimetrică și deci nu este relație de ordine pe mulțimea \mathbf{R} .

c) Relația \leq este o **relație de ordine totală** pe \mathbf{R} , deoarece $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

d) **Proprietăți de legătură** ale relației \leq cu operațiile de adunare și înmulțire:

- 1) $x \leq y, z \in \mathbf{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- 2) $x \leq y, z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$;
- 3) $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$;
- 4) $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$;
- 5) $x \leq y, z \leq t$, $x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$, implică $\Rightarrow xz \leq yt$.

1.1.3 Modulul unui număr real

Definiție. Valoarea absolută sau modulul unui număr real x se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți:

- 1) $|x| \geq 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

- 3) $|-x| = |x|$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 4) $|xy| = |x| \cdot |y|$, $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(\forall)x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$;
- 6) $\text{Respectiv pentru} |x+y| \leq |x| + |y|$, $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 7) $|x| = a \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a = 0 \\ \pm a, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$;
- 8) $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$;
- 9) $|x| > a, a > 0 \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$.

1.1.4 Operații cu intervale de numere reale

Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, definim următoarele submulțimi ale lui \mathbf{R} pe care le numim intervale:

- 1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis în a și b
- 2) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis în a și b
- 3) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis în a , deschis în b
- 4) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ - interval deschis în a , închis în b
- 5) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - interval închis la stânga în a și nemărginit la dreapta
- 6) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - interval deschis la stânga în a și nemărginit la dreapta
- 8) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - interval nemărginit la stânga și închis la dreapta în b
- 9) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - interval nemărginit la stânga și deschis la dreapta în b .

Operațiile cu intervale se definesc la fel ca operațiile cu mulțimi.

Distanța euclidiană dintre numerele reale a și b se definește ca fiind numărul $d(a, b) = |a - b|$.

Axioma lui Arhimede. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există un număr întreg unic n , astfel încât $n \leq x < n + 1$. Numărul n se numește partea întreagă a lui x și se notează $[x]$

1.1.5 Mulțimi mărginite

Definiție. Fiind dată mulțimea nevidă $A \subset \mathbb{R}$, numim **minorant** al mulțimii A numărul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x, (\forall)x \in A$.

Exemplu. Numărul 1 este minorant al mulțimii $\{3, 4, 5\}$, deoarece $1 \leq 3, 1 \leq 4, 1 \leq 5$.

Definiție. Fiind dată mulțimea nevidă $A \subset \mathbb{R}$, numim **majorant** al mulțimii A numărul $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \leq M, (\forall)x \in A$.

Exemplu. Numărul 8 este majorant al mulțimii $(1, 2)$, deoarece $x \leq 8, (\forall)x \in (1, 2)$.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită inferior** dacă are cel puțin un minorant.

Exemplu. Mulțimea $(2, 7)$ este mărginită inferior deoarece 0 este un minorant al ei.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită superior** dacă are cel puțin un majorant.

Exemplu. Mulțimea $(1, 9)$ este mărginită superior deoarece 10 este un majorant al ei.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită** dacă este mărginită superior și inferior.

Exemplu. Mulțimea $(2, 7)$ este mărginită superior de 15 și inferior de 0, deci este mărginită.

Definiție. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ se numește **nemărginită** dacă nu este mărginită.

Exemplu. Mulțimea $(0, \infty)$ este mărginită inferior și nu este mărginită superior deci nu este mărginită.

Teoremă. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită dacă și numai dacă există $M > 0$, astfel încât $|x| \leq M, (\forall)x \in A$.

Consecință. O mulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită dacă și numai dacă $(\forall)M > 0$, există $x_M \in A$ astfel încât $|x_M| > M$.

1.1.6 Marginile unei mulțimi

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$. Numărul $m \in \mathbf{R}$ se numește **minimul** mulțimii A și se notează cu $\min A$ dacă:

- a) m este minorant pentru mulțimea A ;
- b) $m \in A$.

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$. Numărul $M \in \mathbf{R}$ se numește **maximul** mulțimii A și se notează cu $\max A$ dacă:

- a) M este majorant pentru mulțimea A ;
- b) $M \in A$.

Exemplu. Mulțimea $A = [1, 5]$ are $\min A = 1$ și $\max A = 5$.

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$.

- a) Cel mai mare minorant al mulțimii A (dacă există) se numește **infimum** sau **margine inferioară** pentru mulțimea A și se notează $\inf A$.
- b) Cel mai mic majorant al mulțimii A (dacă există) se numește **supremum** sau **margine superioară** pentru mulțimea A și se notează $\sup A$.

Observație.

- a) Dacă $(\exists)\inf A \in A$, atunci $\inf A = \min A$;
- b) Dacă $(\exists)\sup A \in A$, atunci $\sup A = \max A$.

Exemplu. Pentru mulțimea $A = (0, 4]$, avem $\inf A = 0$ și $\sup A = \max A = 4$.

Axioma lui Cantor. Orice mulțime nevidă de numere reale, mărginită inferior admite o margine inferioară.

Consecință. Orice mulțime nevidă de numere reale, mărginită superior admite o margine superioară.

Observație.

- a) Dacă $A \subset \mathbf{R}$ este o mulțime nemărginită inferior, atunci ea nu are minorant număr real, și în acest caz vom lua $\inf A = -\infty$.

b) Dacă $A \subset \mathbf{R}$ este o mulțime nemărginită superior, atunci ea nu are majorant număr real, și în acest caz vom lua $\sup A = +\infty$.

Notatie. Notăm $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Respect pentru oameni și cărti

1.1.7 Vecinătăți, puncte de acumulare

Definiția. Mulțimea $V \subset \mathbf{R}$ se numește **vecinătate** a punctului $a \in \mathbf{R}$ dacă există interval deschis (b, c) astfel încât $a \in (b, c) \subset V$.

Exemplu. Intervalul $(1, 5)$ este vecinătate pentru punctul 3 , deoarece $3 \in (2, 4) \subset (1, 5)$.

Definiția. Mulțimea $V \subset \mathbf{R}$ se numește **vecinătate** a lui $+\infty$ dacă există interval deschis $(a, +\infty)$ astfel încât $(a, +\infty) \subset V$.

Definiția. Mulțimea $V \subset \mathbf{R}$ se numește **vecinătate** a lui $-\infty$ dacă există interval deschis $(-\infty, a)$ astfel încât $(-\infty, a) \subset V$.

Notatie. Pentru $a \in \bar{\mathbf{R}}$ notăm $V(a)$ mulțimea vecinătăților punctului a .

Definiție. Fie mulțimea nevidă $A \subset \mathbf{R}$. Numărul $a \in \bar{\mathbf{R}}$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A , dacă pentru orice vecinătate $V \in V(a)$, $A \cap (V - \{a\}) \neq \emptyset$.

Observație. Orice punct $a \in \mathbf{R}$ care nu este punct de acumulare al lui A se numește **punct izolat** al mulțimii A .

Exemple. Pentru mulțimea $A = (1, 3)$ mulțimea punctelor de acumulare este $[1, 3]$, iar pentru mulțimea $\{1, 2, 3\}$ nu există puncte de acumulare, iar punctele $1, 2, 3$ sunt puncte izolate.

1.2 Funcții reale de variabilă reală

Definiție. Fiind date mulțimile $A, B \subset \mathbf{R}$, funcția $f: A \rightarrow B$ se numește **funcție reală de variabilă reală**.

Definiție. Funcția $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ se numește **funcție mărginită**

inferior dacă există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) \geq a$, $(\forall)x \in A$.

Definiție. Funcția $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ se numește funcție **mărginită superior** dacă există $a \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) \leq a$, $(\forall)x \in A$.

Definiție. Funcția $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ se numește funcție **mărginită** dacă este mărginită inferior și superior.

Exemplu. Funcția $f: [1, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este mărginită, deoarece $1 \leq f(x) \leq 8$ $(\forall)x \in [1, 2]$.

1.3 Siruri de numere reale

1.3.1 Noțiunea de sir

Definiție. Fiind dată o mulțime oarecare A , numim **șir** de elemente din mulțimea A o funcție $f: \mathbf{N}^* \rightarrow A$.

Dacă $A \subset \mathbf{R}$, atunci șirul se numește șir de numere reale.

Notăm $f(n) = a_n$, iar șirul de numere reale cu $(a_n)_{n \geq 1}$.

Exemple. a) $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n + 3$.
b) $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + r$, $r \in \mathbf{R}$ – progresie aritmetică.

Definiție. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale și $\varphi: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Șirul $(a_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ se numește **subșir** al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

Exemplu. Fiind dat șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n + 5$ și $\varphi: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$, $\varphi(n) = 2n$, atunci $a_{\varphi(n)} = a_{2n} = 4n + 5$.

1.3.2 Limite de siruri

Definiție. Un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita a dacă în afara oricărei vecinătăți a lui a se află un număr finit de termeni ai șirului. Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Exemplu. Să arătăm că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Vom arăta că în afara oricărei vecinătăți $V = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > 0$ există un număr finit de termeni ai şirului. Din condiția $\frac{n+1}{n+2} \in V$ obținem: $1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n+2} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$ (1).

Respect pentru oameni și cărți.

Dacă $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, atunci (1) este adevărată pentru orice $n \geq 1$ și

atunci în afara vecinătății V nu se află nici un termen al şirului.

Dacă $\varepsilon < \frac{1}{2}$, atunci luăm $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ și atunci în afara vecinătății V se află termenii $a_1, a_2, \dots, a_{n(\varepsilon)}$.

Definiție. Un sir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita $+\infty$ dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului. Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Definiție. Un sir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita $-\infty$ dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $-\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului. Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

1.3.3 Proprietăți ale şirurilor care au limită

Teoremă. Limita unui sir de numere reale dacă există este unică.

Definiție. Un sir de numere reale care are limita finită se numește **şir convergent**.

Exemplu. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{n}{n+5}$ are limita 1 și este deci şir convergent.

Definiție. Un sir de numere reale care are limita $+\infty$ sau $-\infty$ se numește **şir divergent**.

Exemplu. Şirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = 1 + (-1)^n$ este de fapt şirul